ゲーム理論アプローチによる
公共ライドシェアサービス計画
【3 時限目】
主双対オークション

長江 剛志

東北大学大学院工学研究科
技術社会システム専攻

(nagae@m.tohoku.ac.jp)

Dec 25 - 26, 2015
名古屋工業大学

目次

はじめに

主双対アルゴリズム

主双対オークション

おわりに

3 時限目の内容

双対定理 と **相補性定理** を駆使した線形計画問題の解法である **主双対アルゴリズム** を学び, その手続きが **競上げオークション (主双対オークション)** として構成できることを学ぶ.

目次

はじめに

主双対アルゴリズム

主双対オークション

おわりに

相補性定理と主双対アルゴリズム

相補性定理 より， $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^{\mathrm{N}}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{\mathrm{M}}$ が以下の 3 つの条件を全て満たすならば最適解：

1. $\boldsymbol{x}$ が主実行可能 (ie. $\boldsymbol{x} \in \Omega_P$)
2. $\boldsymbol{y}$ が双対実行可能 (ie. $\boldsymbol{y} \in \Omega_D$)
3. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ が相補性条件を満足する：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top \left(\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}\right) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{n \in N} x_n \left(\sum_{m \in M} a_{m,n} y_m - c_n \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_n > 0 & \rightarrow \sum_{m \in M} a_{m,n} y_m = c_n, \\ \boxed{x_n = 0 \quad \leftarrow \sum_{m \in M} a_{m,n} y_m < c_n} \end{cases}
\end{aligned}
$$

主双対アルゴリズムの基本的考え方

2 を満足する $\boldsymbol{y}$ を生成し，3 の条件を満足するように構築された $\boldsymbol{x}$ が 1 を満足するなら最適解．そうでなければ最適解に近づくように $\boldsymbol{y}$ を改訂．

相補性条件を満足する主変数の構築

ある **双対実行可能解** $\boldsymbol{y}^{(k)} \in \Omega_D$ に対して，**相補性条件** $(\sum_{m\in M} a_{m,n} y_m < c_n \to x_n = 0)$ を満足するような主変数 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ を構築するために，まず, **双対問題の不等式制約が厳密に満足される添字の集合** を以下のように定義する：

$$N^{(k)} := \left\{ n \in N \;\middle|\; \sum_{m\in M} a_{m,n} y_m^{(k)} < c_n \right\}$$

相補性条件 を満足するような主変数 $\boldsymbol{x}^{(k)}$ は以下の制約を満たす必要がある:

$$x_n^{(k)} = 0, \quad \forall n \in N^{(k)}$$

上記の制約の下で, **主実行可能解** $\boldsymbol{x}^{(k)} \in \Omega_P$ を構築できるならば, その $\boldsymbol{x}^{(k)}$ および $\boldsymbol{y}^{(k)}$ は **最適解** である．では，**実行可能な $x^{(k)}$ を構築できるか否かをどのように判定すればよいか？**

主実行可能な解の構築可能性の判定方法) (1)

補助問題 を構築することで, **相補性条件** を満たす主実行可能な主変数が構築できるか否かを判定できる.
まず，主問題の **等式制約の右辺** がいずれも $b_m \geq 0$ となるように, $b_m < 0$ となっている制約条件 m の両辺に -1 を乗じておく.

$$
\text{(P)} \qquad \begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}} \ & \sum_{m \in M} c_n x_n, \\
\text{s.t.} \ & \sum_{n \in N} a_{m,n} x_n = b_m (> 0), \quad \forall m \in M, \\
& x_n \geq 0, \quad \forall n \in N.
\end{aligned}
$$

主実行可能な解の構築可能性の判定方法) (2)

次に，相補性条件と等価な制約 $x_n^{(k)} = 0, \forall n \in N^{(k)}$ を設けた以下のような **制約つき問題** (restricted problem) を考える：

$$
\text{(RP)} \quad
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{z}^{(k)}} \ & \sum_{m \in M} z_m^{(k)}, \\
\text{s.t.} \ & \sum_{n \in N} a_{m,n} x_n^{(k)} + z_m^{(k)} = b_m, \quad \forall m \in M \\
& x_n^{(k)} = 0, \quad \forall n \in N^{(k)}, \\
& x_n^{(k)} \geq 0, \quad \forall n \notin N^{(k)}, \\
& z_m^{(k)} \geq 0, \quad \forall m \in M.
\end{aligned}
$$

この制約つき問題 (RP) は, 以下の便利な性質を持つ:

- **自明な実行可能解** $(\boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{z}^{(k)}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b})$ を持つ.
- 任意の実行可能解に対して **目的関数が非負** .
- (RP) の **最適値が 0** , すなわち $\boldsymbol{z}^{(k)} = \boldsymbol{0}$ かつその時に限り, $\boldsymbol{x}^{(k)}$ は **主実行可能**.

双対変数の改訂 (1)

制約つき問題 (RP) の最適値が 0 より大きいとき，与えられた双対実行可能解 $\boldsymbol{y}^{(k)}$ の下で **相補性条件を満足する主実行可能な解は存在しない**. このとき, **(RP) の双対実行可能解** を用いることで, $\boldsymbol{y}^{(k)}$ よりも**最適解に近い** **双対実行可能解** を求められる.

(RP) の双対問題：

$$
\text{(RD)} \qquad
\begin{aligned}
\max_{\boldsymbol{\psi}^{(k)}} \ & \sum_{m \in M} b_m \psi_m^{(k)}, \\
\text{s.t.} \ & \sum_{m \in M} a_{m,n} \psi_m^{(k)} \leq 0, \quad \forall n \notin N^{(k)}, \\
& \psi_m^{(k)} \leq 1, \quad \forall m \in M.
\end{aligned}
$$

(RP) の最適解が 0 より大きいとき, **弱双対定理** より.

$$
0 < \sum_{m \in M} b_m \psi_m^{(k)} \leq \sum_{m \in N} z_m^{(k)}
$$

双対変数の改訂 (2)

を満足し，かつ

$$\boldsymbol{y}^{(k)} + \delta^{(k)} \boldsymbol{\psi}^{(k)} \in \Omega_D$$

を満足するような **(RD) の実行可能解** (最適解である必要はない) $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ および **正の定数** $\delta^{(k)} > 0$ が存在する.
こうして得られる新しい **双対実行可能解** $\boldsymbol{y}^{(k)} + \delta^{(k)} \psi_m^{(k)}$ は,

$$\sum_{m \in M} b_m \left(y_m^{(k)} + \delta^{(k)} \psi_m^{(k)} \right) > \sum_{m \in M} b_m y_m^{(k)}$$

を満足する．すなわち，$\boldsymbol{y}^{(k)}$ よりも **最適解に「近い」**．

主双対アルゴリズム

Step 0 (初期化) **初期双対実行可能解** $\boldsymbol{y}^{(1)} \in \Omega_D$ を選ぶ. $k := 1$.

Step 1 (制約付き問題の構築) 双対問題の不等式制約が厳密に満足される添字集合 $N^{(k)}$ を求める.

Step 2 (最適性の確認) **制約付き問題** (RP) を解く．最適値が 0 ならば，$\boldsymbol{x}^{(k)}$ および $\boldsymbol{y}^{(k)}$ が **最適解** . 最適値が正ならば, $\boldsymbol{y}^{(k)}$ に対応する相補性条件を満足する主実行可能は存在しない．Step 3 へ.

Step 3 (解の改訂方向の探索) $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\psi}^{(k)} > 0$ かつ $\boldsymbol{y}^{(k)} + \delta^{(k)} \boldsymbol{\psi}^{(k)} \in \Omega_D$ となるような **制約付き双対問題** (RD) の実行可能解 $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ および正の定数 $\delta^{(k)}$ を求める.

Step 4 (解の改訂) **双対実行可能解** を $\boldsymbol{y}^{(k+1)} := \boldsymbol{y}^{(k)} + \delta^{(k)} \boldsymbol{\psi}^{(k)}$ と改訂し，$k := k+1$ として，Step 1 へ.

目次

はじめに

主双対アルゴリズム

主双対オークション

おわりに

双対解の価格による特徴づけ

価格 $\boldsymbol{p}^{(k)} = \{p_i^{(k)}\}$ を与えられた時, 買手 $j \in J$ が獲得し得る最大の利得は

$$\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) = \left[\max_i \left\{v_{i,j} - p_i^{(k)}\right\}\right]_+$$

このとき, $(\boldsymbol{p}^{(k)}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}))$ は **双対実行可能**. つまり, 双対問題の解は **価格のみ** で特徴づけられる.

参入者集合と需要集合

双対実行解 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ に対して, **相補性条件を満足するような主実行可能解**の存在を判別するために **制約つき問題** (RP) を構成したい.
そのために, まず, 以下の 2 つの集合を定義する.

参入者集合

価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下で **正の利得** を獲得し得る買手 (**参入者**) の集合

$$J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) := \left\{ j : \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > 0 \right\}$$

買手 j の需要集合

買手 j にとって **最大の利得** をもたらす (**需要する**) 財の集合:

$$I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) := \left\{ i : \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) = v_{i,j} - p_i^{(k)} \right\}$$

ただし, $I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) = \emptyset, \quad \forall j \notin J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$ とする.

価格 $p^{(k)}$ に対応する相補性条件

価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ に対応する **相補性条件**:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} y_{i,j}\left(\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) - v_{i,j} + p_i^{(k)}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_{i,j} > 0 & \to \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) = v_{i,j} - p_i^{(k)} \\ \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > v_{i,j} - p_i^{(k)} & \to y_{i,j} = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j\in J} \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)})\left(\sum_{i\in I} y_{i,j} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > 0 & \to \sum_{i\in I} y_{i,j} = 1 \\ \sum_{i\in I} y_{i,j} < 1 & \to \pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) = 0 \end{cases}$$

2 つの相補性条件と整合的な **主変数** を構築できるか判別したい.

$\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > v_{i,j} - p_i^{(k)} \to y_{i,j} = 0$

財 i が買手 j の **利得を最大化しない** (i.e. $i \notin I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$), 財 i が買手 j に **需要されない**) なら, その財はその買手には割当てられない.

$\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > 0 \to \sum_{i\in I} y_{i,j} = 1$

買手 j が **正の利得** を得る (i.e. $j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$), 買手 j が **参入者**) なら, その買手は何らかの財を割当てられる.

相補性条件と整合するために主変数が満たすべき条件

$\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > v_{i,j} - p_i^{(k)} \rightarrow y_{i,j} = 0$ **と整合**

$$y_{i,j} = 0 \quad \forall i \notin I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \quad \forall j \in J \tag{1}$$

$\pi_j(\boldsymbol{p}^{(k)}) > 0 \rightarrow \sum_{i \in I} y_{i,j} = 1$ **と整合**

$$\sum_{i \in I} y_{i,j} = 1 \quad \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}). \tag{2}$$

この 2 つの制約を加えた **主問題の制約条件** は

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} y_{i,j} &= 1 \quad \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \\
\sum_{i \in J} y_{i,j} &\leq \mu_i \quad \forall i \in I \\
y_{i,j} &\geq 0 \quad \forall j \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \forall j \in J \\
y_{i,j} &= 0 \quad \forall j \notin I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \forall j \in J
\end{aligned}$$

価格 $p^{(k)}$ に対応する制約付き問題

相補性条件と整合的な **主実行可能解** が存在するか調べるために，**補助変数** $\boldsymbol{z} := \{z_j\}$ を導入して 1 つめの条件を

$$\sum_{i \in I} y_{i,j}^{(k)} + z_j = 1, \quad \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$$

と **緩和** する．この制約下で **補助変数の総和を最小化** する **制約つき問題** は，

$$\begin{aligned}
\text{(RP)} \quad & \max_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}} - \sum_{j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} z_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} y_{i,j} + z_j = 1 \ \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \\
& \sum_{i \in J} y_{i,j} \le \mu_i \qquad \forall i \in I \\
& y_{i,j} \ge 0 \qquad \forall j \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \forall j \in J \\
& y_{i,j} = 0 \qquad \forall j \notin I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \forall j \in J
\end{aligned}$$

制約付き双対問題

制約付き問題 (RP) の双対問題は

$$
\begin{array}{llll}
\text{(RD)} & \displaystyle\min_{\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{q}} & \displaystyle\sum_{j\in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} \psi_j + \sum_{i\in I} \mu_i q_i & \\
& \text{s.t.} & \psi_j + q_i \geq 0 & \forall i \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}), \forall j \in J \\
& & q_i \geq 0 & \forall i \in I \\
& & \psi_j \geq -1 & \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})
\end{array}
$$

この制約付き双対問題 (DP) の **実行可能解** $(\boldsymbol{\psi}^{(k)}, \boldsymbol{q}^{(k)})$ を

1. 目的関数 $\displaystyle\sum_{j\in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} \psi_j + \sum_{i\in I} \mu_i q_i$ が **負**
2. $(\boldsymbol{p}^{(k+1)}, \boldsymbol{\pi}^{(k+1)}) = (\boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q}^{(k)}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}) + \boldsymbol{\psi}^{(k)})$ が **双対実行可能**

の 2 つを満足するように選べれば, 現在の解 $(\boldsymbol{p}^{(k)}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}))$ より **最適解に近い双対実行可能解** $(\boldsymbol{p}^{(k+1)}, \boldsymbol{\pi}^{(k+1)})$ が得られる.

財サブ集合の需要と供給

財サブ集合の需要量

価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ が与えられたとき, 任意の財サブ集合 $I' \subseteq I$ について,
I' に需要集合が含まれる買手の数

$$D_{I'}(\boldsymbol{p}^{(k)}) := \#\left\{j : I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \subseteq I'\right\}$$

を I' の (価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下での) **需要量** と呼ぶ

財サブ集合の供給量

任意の財サブ集合 $I' \subseteq I$ について, **I' に含まれる財の供給量の総和**

$$S_{I'} := \sum_{i \in I'} \mu_i$$

を I' の **供給量** と呼ぶ

超過需要集合と価格競り上げ定理

超過需要集合

価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下で, ある財サブ集合 $I' \subseteq I$ について, その **需要量が供給量を上回る**:

$$D_{I'}(\boldsymbol{p}^{(k)}) > S_{I'}$$

とき, I' は **需要超過** (overdemanded) であるという.

定理 (価格競り上げ)

ある価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下で, ある **超過需要集合** $I' \subseteq I$ に含まれる財の価格を **1 単位** 上げるとき, 新しい価格

$$p_i^{(k+1)} := \begin{cases} p_i^{(k)} + 1 & \text{if } i \in I' \\ p_i^{(k)} & \text{otherwise} \end{cases}$$

の下での解 $(\boldsymbol{p}^{(k+1)}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k+1)}))$ は, **双対実行可能** で, $\boldsymbol{p}^{(k)}$ より **最適解に近い** (i.e. 目的関数値がより小さい). (証明は後述)

主双対オークションの手続き

Step 0 (初期化) **初期価格** を $\boldsymbol{p}^{(k)} = \mathbf{0}$ とする. $k := 1$.

Step 1 (制約付き問題の構築) 現在の価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下で, 各買手は **需要集合** $I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$ を表明.

Step 2 (最適性の判別・解の改訂方向の探索) 全ての財サブ集合 I' について, 順に **需要量** $D_{I'}(\boldsymbol{p}^{(k)})$ を求め, 供給量 $S_{I'}$ と比較して **超過需要** か否かを判別. **超過需要集合** I' が見つかれば, それを **値上げ対象** として Step 3 へ. どの財サブ集合も超過需要でなければ, **全ての買手の需要を満たす割当** が存在し, これが **最適割当** となる.

Step 3 (解の改訂) 値上げ対象 I' に含まれる財の価格を **1 単位増加** させたものを $\boldsymbol{p}^{(k+1)}$ とする. $k := k + 1$ として Step 1 へ.

私的情報下での主双対オークションの利点

- Step 1 の **制約付き問題の構築** において, **管理者** が知る必要があるのは 各買手の **需要集合** だけで**私的情報** である評価値の **観測・推計は不要**.
- 各買手は, 自らの **評価値** $\{v_{i,j} : j \in J\}$ と公開されている価格 $\{p_i : i \in I\}$ のみに基づいて **需要集合** を構築できる.
- 各買手が **虚偽の需要集合** を申告する **誘引** を持たなければ最適割当の実現が保証. → 各買手にとって需要集合を正直に申告することが **Nash 均衡戦略** となることが保証されている.

価格競り上げ定理の証明

価格の変化分 を $\boldsymbol{q} = \{q_i : q_i = 1 \forall i \in I' \text{ and } q_i = 0 \forall i \notin I'\}$ とし,

$$\psi_j(\boldsymbol{q}) = \max_{i \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} -q_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi_j(\boldsymbol{q}) = \begin{cases} -1 & \text{if } I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \subseteq I' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. この式は, 価格変化に伴う **参入者** $j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$ の **最大利得の変化分** と解釈できる: 価格 $\boldsymbol{p}^{(k)}$ の下で **需要する "全ての財" の価格が上がった時に限り 1 単位減少** する.
「価格を $\boldsymbol{q}$ だけ競り上げることで, より最適解に近い新しい価格が得られること」を証明するため, 以下を順に示していく.

1. $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}))$ が **(RD) 実行可能** である;
2. $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}))$ が **(RD) の目的関数を負** とする: $\sum_{j \in J^*} \psi_j + \sum_{i \in I'} \mu_i q_i < 0$;
3. 新しい価格 $\boldsymbol{p}^{(k+1)} = \boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q}$ およびその下での最大利得 $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k+1)}) = \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}) + \boldsymbol{\psi}$ が**双対実行可能** である.

$(q, \psi(q))$ は (RD) 実行可能

(RD) の許容領域は

$$\left\{ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\psi}) \middle| \begin{array}{rl} \psi_j + q_i \geq 0 & \forall i \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}), \forall j \in J \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \\ q_i \geq 0 & \forall i \in I \\ \psi_j \geq -1 & \forall j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \end{array} \right\}$$

- $\psi_j = \max\limits_{i \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} -q_i$ であるから, $\psi_j \geq q_i \quad \forall i \in I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)})$.
- $q_i \in \{0, 1\}$ であるから $q_i \geq 0$.
- 定義より $\psi_j \in \{0, -1\}$ であるから, $\psi_j \geq -1$.

従って, $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{q}))$ は **(RD) 実行可能**.

$(q, \psi(q))$ では (RD) の目的関数が負

$$\psi_j = \begin{cases} -1 & \text{if } I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \subseteq I' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

より, 目的関数の第 1 項は,

$$\sum_{j \in J^*(\boldsymbol{p}^{(k)})} \psi_j = -\#\left\{ j : I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \subseteq I' \right\}$$

$$= -D_{I'}(\boldsymbol{p}^{(k)}).$$

すなわち, **値上げ対象となる財サブ集合** I' の **需要量** (の符号を反転したもの) に等しい.

$$q_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in I' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

より, 目的関数の第 2 項は,

$$\sum_{i \in I} \mu_i q_i = \sum_{i \in I'} \mu_i = S_{I'}$$

すなわち, **値上げ対象となる財サブ集合** I' の **供給量** に等しい.

目的関数は負

値上げ対象 I' は **超過需要集合** のため $D_{I'}(\boldsymbol{p}^{(k)}) > S_{I'}$. 従って, (RD) の **目的関数は負** となる.

$\boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}) + \boldsymbol{\psi}$ は双対実行可能 (1)

$\boldsymbol{p}^{(k)}, \boldsymbol{q} \geq 0$ より, $\boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q} \geq \boldsymbol{0}$ は明らか.
残る双対制約は $\pi_j \geq v_{i,j} - p_i$ および $\pi_j \geq 0$. $v_{i,j}, p_i$ がいずれも同じ単位の **離散値** を取るならば, π_j もまた同一単位の **離散値** であり,

$$\pi_j > v_{i,j} - p_i \quad \rightarrow \quad \pi_j - 1 \geq v_{i,j} - p_i \tag{3}$$

$$\pi_j > 0 \quad \rightarrow \quad \pi_j - 1 \geq 0 \tag{4}$$

$\psi_j = 0$ となる場合

- $\pi_j \geq 0$ であるから $\pi_j + \psi_j \geq 0$.
- $q_i \in \{0, 1\}$ より, 明らかに

$$\pi_j \geq v_{i,j} - p_i \quad \rightarrow \quad \pi_j \geq v_{i,j} - (p_i + q_i)$$

$\boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}) + \boldsymbol{\psi}$ は双対実行可能 (2)

$\psi_j = -1$ となる場合

- 買手 j は参入者であるから $\pi_j > 0$. 式 (4) より $\pi_j + \psi_j \geq 0$.
- 買手 j の需要集合の財が全て値上げされる (i.e. $I_j^*(\boldsymbol{p}^{(k)}) \subseteq I'$) ので,
  - 値上りする財 $i \in I'$ については,

$$\pi_j \geq v_{i,j} - p_i \quad \rightarrow \quad \pi_j + \psi_j \geq v_{i,j} - (p_i + q_i)$$

    (**両辺が 1 づつ減少する** ので大小関係は変化しない)
  - 値上りしない財 $i \notin I'$ については, 式 (3) より, $\pi_j + \psi_j \geq v_{i,j} - (p_i + q_i)$.

従って, $\left(\boldsymbol{p}^{(k)} + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{p}^{(k)}) + \boldsymbol{\psi}\right)$ は双対実行可能.

目次

はじめに

主双対アルゴリズム

主双対オークション

おわりに

まとめ

- 線形計画問題の解法の一つとして **主双対アルゴリズム** を紹介:
  1. ある双対実行可能解に対し, **相補性条件** を満足するような主実行可能解が存在するか否かを判定するために **制約つき主問題** を構築.
  2. 制約つき主問題の最適値が 0 ならば最適解. そうでなければ, **制約つき双対問題** の実行可能解を用いて双対実行可能解を改訂.
- 主双対アルゴリズムの実装として主双対オークションを紹介:
  1. ある価格に対し, 各買手に **需要集合** を申告させる.
  2. 申告された需要集合に基づき, 各財サブ集合が **超過需要** か否かを判別する.
  3. 超過需要集合が無ければ最適割当が実現可能. そうでなければ, **超過需要集合** の価格を増加させる.