ゲーム理論アプローチによる
公共ライドシェアサービス計画
【3 時限目】
VCG メカニズムと線形計画問題

長江 剛志

東北大学大学院工学研究科
技術社会システム専攻

(nagae@m.tohoku.ac.jp)

Dec 25 - 26, 2015
名古屋工業大学

目次

3 時限目の内容

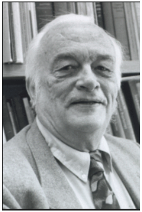
- Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズムについて学ぶ
- VCG 価格が **双対問題の解** として求められるケースを学ぶ

目次

Vickrey-Clarke-Groves (VCG) 価格

オークションに参加する各買手にとって, 自らの **真の評価値** を申告することが **(弱) 支配戦略** となるような価格.

支配戦略　他の買手の申告によらず, **虚偽の申告** によって **自らの利得を改善できない**.



William Vickrey (1914-1996)

Edward H. Clarke (1939-2013)

Theodore Groves

VCG 価格の計算方法 (1)

買手サブ集合に対する割当問題

- $v_j(\boldsymbol{y}) = \sum_{i \in I} v_{i,j} y_{i,j}$: ある割当 $\boldsymbol{y} = \{y_{i,j}\}$ の下で買手 j が得る評価値
- $\boldsymbol{y}^*_{\hat{J}}$: ある買手サブ集合 $\hat{J} \subseteq J$ に対する割当問題の解 (最適割当):

$$
\begin{aligned}
V^*_{\hat{J}} := \max_{\boldsymbol{y}} & \sum_{j \in \hat{J}} v_j(\boldsymbol{y}) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I} y_{i,j} \leq 1 \qquad \forall j \in \hat{J} \\
& \sum_{j \in \hat{J}} y_{i,j} \leq \mu_i \qquad \forall i \in I \\
& y_{i,j} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in I \times \hat{J}
\end{aligned}
$$

VCG 価格の計算方法 (2)

買手 l の VCG 価格

- $\hat{J} = J$ なら元の割当問題に一致. 最適値は $V_J = \sum_{j \in J} v_j(\boldsymbol{y}^*_J)$.
- 買手 l 以外のサブ集合 $\hat{J} = J \setminus l$ に対する最適割当および最適値を, それぞれ, $\boldsymbol{y}^*_{-l} = \boldsymbol{y}^*_{J \setminus l}$ および $V_{-l} = V_{J \setminus l} = \sum_{j \in J \setminus l} v_j(\boldsymbol{y}^*_{-l})$

買手 $l \in J$ の VCG 価格は以下の **2 つの項の差** で与えられる：

1. **買手 l が不在の集合** $J \setminus l$ における割当問題の最適値 V_{-l}
2. 買手 l が存在する下での最適割当における **買手 l 以外** の総評価値 $V_J - v_l(\boldsymbol{y}^*_J)$

$$P_l = V_{-l} - \left\{ V_J - v_l(\boldsymbol{y}^*_J) \right\} = \underbrace{\sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}^*_{-l})}_{\text{買手 } l \text{ がいない時の総評価値}} - \underbrace{\sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}^*_J)}_{\text{買手 } l \text{ 以外の総評価値}}$$

VCG 価格の特徴 (1)

VCG 価格の 迷惑料 としての解釈

$$P_l = V_{-l} - \left\{V_J - v_l(\boldsymbol{y}_J^*)\right\} = \sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}_{-l}^*) - \sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}_J^*)$$
$$= \sum_{j \neq l} \left\{v_j(\boldsymbol{y}_{-l}^*) - v_j(\boldsymbol{y}_J^*)\right\}$$

- $v_j(\boldsymbol{y}_{-l}^*) - v_j(\boldsymbol{y}_J^*)$ は買手集合が $J \setminus l$ から J に変化した (i.e. **買手 l が 市場に参入 した**) 時の**買手 j の評価値の 変化量**.
- 買手 l の **VCG 価格** は, 買手 l が **市場に参入** することで **他の買手が失った評価値の総和** (= **迷惑料**) に等しい.

VCG 価格の特徴 (2)

VCG 価格の下で買手が得る利得の 限界生産 としての解釈

$$\begin{aligned}\pi_l &= v_l(\boldsymbol{y}_J^*) - P_l \\ &= v_l(\boldsymbol{y}_J^*) - \sum_{j \neq l} \left\{ v_j(\boldsymbol{y}_{-l}^*) - v_j(\boldsymbol{y}_J^*) \right\} \\ &= v_l(\boldsymbol{y}_J^*) + \sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}_J^*) - \sum_{j \neq l} v_j(\boldsymbol{y}_{-l}^*) \\ &= V_J - V_{-l}\end{aligned}$$

買手 l の利得は, 買手 l が市場に参入することで **増加した評価値の総和** (= **限界生産**) に等しい.

2 財 3 人の例での VCG 価格

評価値

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

2 財 3 人の例での VCG 価格

評価値

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は買手 1 に財 B, 買手 3 に財 A を配分 (i.e. $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$).
- 買手 1 は 60, 買手 3 は 40 の評価値を得る.

2 財 3 人の例での VCG 価格

評価値

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

買手 1 が存在しない市場

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は買手 1 に財 B, 買手 3 に財 A を配分 (i.e. $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$).
- 買手 1 は 60, 買手 3 は 40 の評価値を得る.
- 買手 1 の VCG 価格は
  - 買手 1 が存在しない市場での総評価値: 20 + 40 = 60
  - 買手 1 以外の総評価値: 40

  の差で 20.
- 買手 1 が市場に参入 することで**買手 2 が失う評価値** 20 と同じ金額
- 買手 1 の利得 60 - 20 = 40 は, 買手 1 の市場参入 により増加する総評価値

2 財 3 人の例での VCG 価格

評価値

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

買手 3 が存在しない市場

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は買手 1 に財 B, 買手 3 に財 A を配分 (i.e. $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$).
- 買手 1 は 60, 買手 3 は 40 の評価値を得る.
- 買手 3 の VCG 価格は
  - 買手 3 が存在しない市場での総評価値: 70 + 20 = 90
  - 買手 3 以外の総評価値: 60

  の差で 30.
- 買手 3 が市場に参入 することで**買手 1 が失う評価値** 10 と**買手 2 が失う評価値** 20 の和に等しい
- 買手 3 の利得 40 - 30 = 10 は, 買手 3 の限界生産 に一致

2 財 3 人の例での VCG 価格

評価値

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

買手 2 が存在しない市場

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は買手 1 に財 B, 買手 3 に財 A を配分 (i.e. $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$).
- 買手 1 は 60, 買手 3 は 40 の評価値を得る.
- **買手 2** が市場参入しても **割当は変化しない** (買手 2 には財が配分されない) ので VCG 価格は 0. 利得も 0.

VCG 価格の誘引整合性 (1)

VCG 価格の下では，各買手は，自らの評価値を **正直に表明** することが **(弱) 支配戦略** となる．すなわち，他の買手がいかなる評価値を入札していようと，各買手 $l \in J$ は, 自らの評価値 $\boldsymbol{v}_l := \{v_{i,l} : i \in I\}$ を正直に入札することで最も高い利得を得る.

買手 l の各財への入札額を $\boldsymbol{b}_l := \{b_{i,l} : i \in I\}$, 買手 l 以外の各財への入札額を $\boldsymbol{b}_{-l} := \{b_{i,j} : (i,j) \in I \times (J \setminus l)\}$ で表す.
買手 l が自らの真の評価値を申告した時 $(\boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{b}_{-l})$ と虚偽を申告した時 $(\boldsymbol{b}_l, \boldsymbol{b}_{-l})$ の下での最適な割当 (i.e. 申告された評価値の総和を最大化する割当) を, それぞれ, $\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*$ で表す．買手 l を除いた市場 $J \setminus l$ における最適割当を $\boldsymbol{y}^*_{-l}$ で表す.
ここで, $\boldsymbol{y}^*$ は目的関数 $\sum_i v_{i,l} y_{i,l} + \sum_i \sum_{j \neq l} b_{i,j} y_{i,j}$ を最大化する, すなわち, 任意の $\hat{\boldsymbol{y}}$ について以下が成り立つ.

$$\sum_{i \in I} v_{i,l} y^*_{i,l} + \sum_{i \in I} \sum_{j \neq l} b_{i,j} y^*_{i,j} \geq \sum_{i \in I} v_{i,l} \hat{y}_{i,l} + \sum_{i \in I} \sum_{j \neq l} b_{i,j} \hat{y}_{i,j}$$

VCG 価格の誘引整合性 (2)

いま, $\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*$ の下で買手 l が得る利得は

$$\pi_l(\boldsymbol{y}^*) = v_l(\boldsymbol{y}^*) + \sum_{j \neq l} b_j(\boldsymbol{y}^*) - \sum_{j \neq l} b_j(\boldsymbol{y}_l^*)$$

$$\pi_l(\boldsymbol{z}^*) = v_l(\boldsymbol{z}^*) + \sum_{j \neq l} b_j(\boldsymbol{z}^*) - \sum_{j \neq l} b_j(\boldsymbol{y}_l^*)$$

である. 右辺第 3 項はどちらも同じため, 正直申告と虚偽申告の利得の差を取れば,

$$\begin{aligned}\pi_l(\boldsymbol{y}^*) - \pi_l(\boldsymbol{z}^*) &= \left\{\sum_{i \in I} v_{i,l} y_{i,l}^* + \sum_{i \in I} \sum_{j \neq l} b_{i,j} y_{i,j}^*\right\} - \left\{\sum_{i \in I} v_{i,l} z_{i,l}^* + \sum_{i \in I} \sum_{j \neq l} b_{i,j} z_{i,j}^*\right\} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

を得る. $\square$

具体例

板書参照.

VCG 価格の長所と短所 (Ausubel and Milgrom, 2005)

長所

1. 正直申告が **支配戦略** となる
2. マイルドな仮定の下で, 正直申告が **支配戦略** で, **効率的配分** が実現でき, かつ **敗者の支払いが不要** となる **唯一** の直接表明メカニズムである.
3. **より一般的な枠組** へも適用可能
   e.g. 1 人の買手が複数財を購入できる, 「財の買い占め」を抑制できる, etc.

短所

1. ルールが判り難く, 大規模になると **VCG 価格の計算** が大変
2. 売手の収益が **極めて低い, もしくはゼロ** になる
3. 売手の収益が **買手集合や買手の入札額に対して単調ではない**
4. **敗者同士の提携** や 1 人の買手が別人になりすます **匿名入札** に対して頑健でない

2〜4 は買手が代替的 *buyers are substitute* であれば (e.g. **単一需要**) 生じない

VCG 価格の長所と短所 (Ausubel and Milgrom, 2005)

長所

1. 正直申告が **支配戦略** となる
2. マイルドな仮定の下で, 正直申告が **支配戦略** で, **効率的配分** が実現でき, かつ **敗者の支払いが不要** となる **唯一** の直接表明メカニズムである.
3. **より一般的な枠組** へも適用可能
   e.g. 1 人の買手が複数財を購入できる, 「財の買い占め」を抑制できる, etc.

短所

1. ルールが判り難く, 大規模になると **VCG 価格の計算** が大変 → LP で扱うメリット
2. 売手の収益が **極めて低い, もしくはゼロ** になる
3. 売手の収益が **買手集合や買手の入札額に対して単調ではない**
4. **敗者同士の提携** や 1 人の買手が別人になりすます **匿名入札** に対して頑健でない

2〜4 は買手が代替的 *buyers are substitute* であれば (e.g. **単一需要**) 生じない

2 財 3 人の VCG 価格と双対問題の最適解

2 つの財 A, B と 3 人の買手 1, 2, 3. 各買手の各財に対する **評価値**

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$ で 最適値 は **100**.
- **買手 1** の **財 B** に対する VCG 価格 $P_1 = 20$
- **買手 3** の **財 A** に対する VCG 価格 $P_1 = 30$

2 財 3 人の VCG 価格と双対問題の最適解

2 つの財 A, B と 3 人の買手 1, 2, 3. 各買手の各財に対する **評価値**

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$ で 最適値 は **100**.
- **買手 1** の **財 B** に対する VCG 価格 $P_1 = 20$
- **買手 3** の **財 A** に対する VCG 価格 $P_1 = 30$

双対問題の最適解 (その 1)
$(p_A^*, p_B^*) = (39, 29)$

	財 A	財 B	π_j
買手 1	31	31	31
買手 2	−9	−9	0
買手 3	1	−19	1

- 社会的余剰の最適値: 31 + 0 + 1 + 39 + 29 = **100**
- **買手 1** の **財 B** に対する価格: $p_B = 29$
- **買手 3** の **財 A** に対する価格: $p_A = 39$

2 財 3 人の VCG 価格と双対問題の最適解

2 つの財 A, B と 3 人の買手 1, 2, 3. 各買手の各財に対する **評価値**

	財 A	財 B
買手 1	70	60
買手 2	30	20
買手 3	40	10

- 最適割当は $y_{B,1} = y_{A,3} = 1$ で 最適値 は **100**.
- **買手 1** の **財 B** に対する VCG 価格 $P_1 = 20$
- **買手 3** の **財 A** に対する VCG 価格 $P_3 = 30$

双対問題の最適解 (その 2)
$(p_A^*, p_B^*) = (30, 20)$

	財 A	財 B	π_j
買手 1	40	40	40
買手 2	0	0	0
買手 3	10	−10	10

- 社会的余剰の最適値: $40 + 0 + 10 + 30 + 20 =$ **100**
- **買手 1** の **財 B** に対する 価格: $p_B = 20$
- **買手 3** の **財 A** に対する 価格: $p_A = 30$

双対問題の最適解 と **VCG 価格** が一致するケースがある!!

VCG 価格と双対問題の最適解

割当問題において，各買手が **各財に対して支払う VCG 価格** は **双対問題の最適解** (p^*, π^*) の中で **最小の価格** に一致する. (Demange et al., 1986)

VCG 価格を **定義通り** に求めるには,

- **最適割当** を求める問題
- 財を割当てられた買手 (**勝者**) ごとの **VCG 価格** を求める問題

を解かなければならない. **勝者** (=財の供給量) が N′ なら N′ + 1 個の **割当問題** を解く必要がある.

割当問題 が **線形計画問題と等価** な場合, 双対問題を **一度** 解くだけで以下が全て計算できる:

- 各買手の **VCG 価格** (**最適解** として求められる)
- **最適割当** (**相補性定理** から計算できる)

目次

まとめ

- **Vickrey-Clarke-Groves (VCG) 価格** は, **最適割当** を求めた後, 財を割当られた買手 (**勝者**) のそれぞれについて,
  1. その買手以外で構成される市場 における **評価値の総和**
  2. 最適割当の下 で **その買手以外が得る評価値の総和**

  の **差** として求められる.
- VCG 価格の下では, 各買手にとって **評価値を正直に申告する** ことが **支配戦略**
- 割当問題が線形計画問題に帰着する場合, VCG 価格が **双対問題の最適解** の中で **価格を最小とするもの** に一致する

参考文献

Ausubel, L. M. and Milgrom, P. “Lovely but Lonely Vickrey Auction,” In Cramton, P., Shoham, Y., and Steinberg, R. eds. Combinatorial Auctions. The MIT Press 2005.

Demange, G., Gale, D., and Sotomayor, M. “Multi-Item Auctions,” Journal of Political Economy, 94 (4), pp. 863–872 1986.